

Dans cette séance on va voir

[43]

- (i) on va voir la formule de changement de base (voir feuille 42)
- (ii) exemples de changement de base

matrice⁺ d'applications linéaires

- (iii) la notion de valeur et vecteur propre

Exemple 8.5[†]

Soient $B_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On veut calculer d'abord calculer

$$[\vec{v}]_{B_{can}} \quad \text{et} \quad [\vec{v}]_B$$

① d'abord:

↙ toujours vrai

$$[\vec{v}]_{B_{can}} = \vec{v} \Rightarrow [\vec{v}]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $[\vec{v}]_B$:

Méthode 1] Résoudre un SEL

Par définition

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \nabla$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 2\alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

En conséquence, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ et $\alpha_1 = 4$ ✓

⇓

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla$$

Méthode 2] On sait

$$P_{B_{can} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

toute matrice
de passage
 $B_{can} \leftarrow B$
de $\mathbb{R}^n$ est comme
ça !!

II faut calculer

$$P_{B \leftarrow B_{can}} = P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Or

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \nabla$$

Alors

$$P_{B \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\boxed{[\vec{v}]_B = P_{B \leftarrow B_{can}} [\vec{v}]_{B_{can}}} \quad (\text{identité fondamentale})$$

on a que

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Soit

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

44

donnée par $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Calculer $[T]$ et $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$.

D'abord

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$$

c'est toujours vrai pour les app $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Pour calculer $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$:

Méthode 1 | Par définition

$$[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := \left[[T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \quad [T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \quad [T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \right]$$

Il faut calculer déjà par ?

$$[T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[.]_{\mathcal{B}}$ est zpp lin?

$$[T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

Formule de changement de base :

$$[T]_{B \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} \cdot [T]_{B_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}} P_{B_{\text{can}} \leftarrow B}$$

Dans ce cas

déjà calculés !!

$$\begin{aligned} [T]_{B \leftarrow B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

On va calculer

$$[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{méthode 1}}}{=} \begin{bmatrix} [T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} & [T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} & [T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Matrice} \\ \text{diagonale!} \end{array}$$

$$[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}} = 6 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Noter que

45

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla !$$

Déf. 10.2 Soit $T: V \rightarrow V$ / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une app. lin / matrice

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T/A s'il existe $v \in V$ / $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$T(v) = \lambda \cdot v \quad / \quad A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$$

On dit que $v/\bar{v}$ est un vecteur propre de T/A associé à λ .

$\triangle$ L'exemple précédent nous dit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda = 6$.

De même, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de T associés à la valeur propre $\lambda = 0$.

RK Si v est un vecteur propre de $T: V \rightarrow V$, alors $c \cdot v$ aussi pour tout $c \in \mathbb{R}$ non nul, avec la même valeur propre ∇ (de même pour les matrices A et leurs vecteurs et valeurs propres).